中国CAE联盟
www.CAEnet.cn
资料收集
版权归属原作者

两种强化模型在拉伸筋阻力计算中的比较*

曹　颖，胡　平，李大永
（吉林大学　汽车覆盖件成形技术研究所　　长春　130025）

摘　要　将等向强化模型与运动强化模型分别引入逐级更新 Langrange 有限元列式，采用八节点平面应变单元，对拉伸筋阻力进行了数值计算，并将两种模型的计算结果进行了比较与讨论。

关键词　等向强化模型　运动强化模型　U. L.有限元法　拉伸筋阻力
中国图书资料分类法分类号　TG386

在板材冲压成形过程中，在压边圈或凹模表面设置拉伸筋是改善成形工艺，提高成形质量的有效措施。拉伸筋提供的进料阻力对控制板料流动起着重要的作用，所以拉伸筋是冲压模具设计中的一个重要组成部分。近年来，板材冲压成形的有限元模拟技术取得了很大进展。但是如果在板材成形过程中连同压边圈上的拉伸筋一同进行数值模拟，由于拉伸筋相对于冲头尺寸很小，势必要细分网格，使计算工作量大大增加。因此，需要将拉伸筋简化为等效模型，单独进行拉伸筋阻力的计算，向冲压成形过程的三维有限元模拟提供拉伸筋阻力曲线。

对拉伸筋作用的有限元数值模拟，是一个十分复杂的几何、物理及边界摩擦三重非线性问题。目前，已经有一些学者利用有限元方法计算拉伸筋阻力。N. Triantafyllidis[1]等采用 Total Lagrange 有限元方法和一种壳单元模型模拟了板材在拉伸筋处的变形过程，得到了拉伸筋阻力曲线[1]；T. H. Choi[2]则采用平面四边形单元并结合 Update Lagrange 有限元方法进行数值模拟；而 Sunaga 和 Makinouchi[3,4]则采用了平面应变四节点单元和求解瞬态持续平衡方程方法进行了类似的研究。吴建平等[5]采用了由四节点平面应变单元退化而成的二节点线单元，U.L.有限变形弹塑性有限元方法研究了板材成形中直拉伸筋的作用。这些研究中采用的材料强化模型都是等向强化模型，然而，板材通过拉伸筋过程要经过几次弯曲与反弯曲变形，必然存在着 Bauschinger 效应[6]。因此，为了更好地反映板材在拉伸筋处的变形特点，本文将 Tvergaard[7]提出的有限变形情况下的运动强化 J2F 理论引入 U. L. 弹塑性有限元列式，建立了拉伸筋阻力计算模型，对拉伸筋阻力进行了计算，并与 Nine[8]的经典拉伸筋实验结果以及采用等向强化 J2F 理论的计算结果进行了比较与讨论。

1　理论模型：

1.1　强化法则

当材料达到初始屈服以后，如果继续加载，屈服面要随着材料的进一步塑性变形面发生变化。强化规律就是屈服面的大小、形状和位置的变化规律。如果在加载过程中，屈服面向各个方向均匀地扩张，其中心、形状及其在应力空间的方位均保持不变，如图 1-1 所示，这种强化规律称为等向强化模型；如果加载过程中只在应力空间做平动，而形状与大小不变，如图 1-2 所示，这种强化规律称为运动强化模型。这种强化模型可以描述材料在循环加卸载中存在的 Bauschinger 效应。根据强化模型中屈服面在应力空间中的移动张量即背应力向量 α_{ij} 的演化规律的不同，运动强化主要有两种形式：Prager 运动强化法则与 Ziegler 运动强化法则。Prager 运动强化法则[9]规定屈服曲面中心的移动方向是沿表征现时应力状态的应力点的法线方向。但是这种强化法则在应用于应力子空间时

* 国家自然科学基金重点项目(No.19472031)，国家“九五”重点科技攻关项目(96 – 120 - 13)联合资助

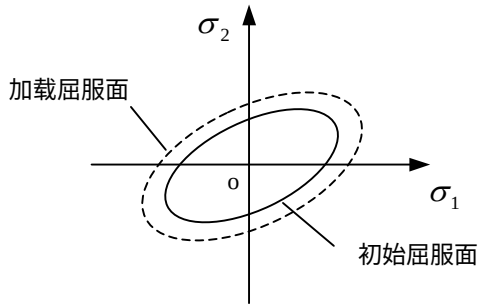


图 1－1 各向同性强化模型

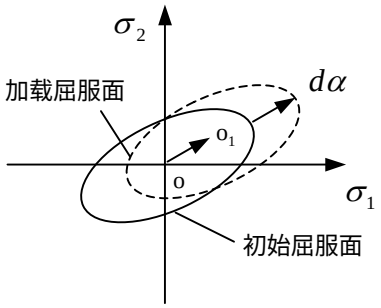


图 1－2 运动强化模型

图 1 强化模型示意图

会产生不一致性[10],为此 Ziegler[11]提出了一种适用于应力子空间的修正运动强化法则，规定加载屈服曲面沿连结其中心和现时 应力点的向量方向移动。后来，Tvergaard 将 Ziegler 运动强化法则推广至有限变形条件下，推导出了有限变形条件下的 Ziegler 运动强化 J2F 本构。

1.2 有限变形条件下的 Ziegler 运动 J2F 强化本构：

对于运动强化模型，Mises 型屈服函数可以表示为

$$\phi(\sigma_{ij},\alpha_{ij})=\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{'}-\alpha_{ij}^{'})(\sigma_{ij}^{'}-\alpha_{ij}^{'})-\frac{1}{3}\sigma_y^2=0 \tag{1}$$

其中，σ_{ij} 为 Cauchy 应力，$\sigma_{ij}^{'}$ 为其偏量，α_{ij} 称为背应力，它表示在应力空间中屈服面的即时位置，在物理上它表示由于塑性变形在材料中引起的微观残余应力[12]，$\alpha_{ij}^{'}$ 为其偏量，即

$$\alpha_{ij}^{'}=\alpha_{ij}-\frac{1}{3}\alpha_{mm}\delta_{ij}$$

对于等向强化模型，$\alpha_{ij}=0$。σ_y 为材料的现时屈服应力，对于运动强化模型，σ_y 始终等于初始屈服应力 σ_s，而对于等向强化模型，σ_y 随着塑性变形的变化而更新。

关于背应力 α_{ij} 的演化规律，根据 Zeigler 提出的背应力移动方案，并将其推广至有限变形理论中，为

$$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}=\dot{\mu}(\sigma_{ij}-\alpha_{ij}) \quad , \qquad \dot{\mu}\geq 0 \tag{2}$$

式中，$\overset{\nabla}{\alpha}_{ij}$ 为 α_{ij} 的 Jaumann 率。

利用一致性条件 $\dot{\phi}=0$，由（1）式可以得到：

$$(\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}-\overset{\nabla}{\alpha}_{ij})(\sigma_{ij}^{'}-\alpha_{ij}^{'})=0 \tag{3}$$

将（2）式代入（3）式，可以得到：

$$\dot{\mu}=\frac{(\sigma_{ij}^{'}-\alpha_{ij}^{'})\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}}{(\sigma_{ij}^{'}-\alpha_{ij}^{'})(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})} \tag{4}$$

在弹塑性大变形分析中，采用 Cauchy 应力 σ_{ij} 的 Jaumann 速率描述本构方程：

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = D^{ep}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{5}$$

其中弹塑性本构张量 $D^{ep}_{ijkl} = D^{e}_{ijkl} - D^{p}_{ijkl}$，$D^{e}_{ijkl}$ 为弹性本构张量，D^{p}_{ijkl} 为塑性本构张量。

$$D^{e}_{ijkl} = (E/(1+\mu))[(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 + (\mu/(1-2\mu))\delta_{ij}\delta_{kl}] \tag{6}$$

式中，E 为弹塑性模量，μ 为泊松比。

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为 Cauthy 应变率，等于弹性应变率与塑性应变率之和：$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$。

应用相关流动法则 $\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}$，（$\dot{\lambda} > 0$）并采用类似等向强化塑性本构推导方法[13]，可以得运动强化的塑性本构张量

$$D^{p}_{ijkl} = \frac{D^{e}_{ijmn}(\partial f/\partial\sigma_{mn})(\partial f/\partial\sigma_{pq})D^{e}_{pqkl}}{(\partial f/\partial\sigma_{rs})D^{e}_{rsgh}(\partial f/\partial\sigma_{gh}) + (4/9)\sigma_{y}^{2}E_{p}} \tag{7}$$

其中，

$$\partial f/\partial\sigma_{mn} = \sigma'_{mn} - \alpha'_{mn} \tag{8}$$

$E_{p} = \dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}^{p}}$，为 $\bar{\sigma} \sim \bar{\varepsilon}^{p}$ 曲线的切线模量，

其中，$\bar{\sigma}$ 为 Cauchy 等效应力，$\bar{\varepsilon}^{p}$ 为 Cauchy 等效塑性应变。

1.3 U. L.弹塑性有限元列式

采用逐级更新 Lagrange 法，以 t 时刻构形为参考构形的虚功率增率方程[14]为:

$$\int_{V}\dot{t}_{ij}\delta l_{ji}dV = \int_{V}\dot{P}_{i}\delta\dot{u}_{i}dV + \int_{A}\dot{\bar{P}}_{i}\delta\dot{u}_{i}dA \tag{9}$$

式中，V、A 分别为参考构形下的体积与表面积；

$\dot{\bar{P}}_{i}$、$\dot{P}_{i}$ 分别为参考构形下的面积力率和体积率；

l_{ij} 为速度梯度张量，$\dot{u}_{i}$ 为速度；

$\dot{t}_{ij}$ 为第一类 Kirchhoff 应力率。

假定材料不可压缩，则有

$$\dot{t}_{ij} = \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\dot{\varepsilon}_{kl} - \sigma_{kj}\varepsilon_{kl} + \sigma_{ik}l_{jk} \tag{10}$$

将（6）式和（10）式代入（9）式，得

$$\int_{V}\left[\left(D^{ep}_{ijkl} - F_{ijkl}\right)\dot{\varepsilon}_{kl}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ik}l_{jk}\delta l_{ji}\right]dV = \int_{V}\dot{P}_{i}\delta\dot{u}_{i}dV + \int_{A}\dot{\bar{P}}_{i}\delta\dot{u}_{i} \tag{11}$$

式中，

$$F_{ijkl} = \frac{1}{2}(\sigma_{lj}\delta_{ki} + \sigma_{kj}\delta_{li} + \sigma_{li}\delta_{kj} + \sigma_{ki}\delta_{lj}) \tag{12}$$

将速度、应变率以及速度梯度分别用节点速度表示为

$$\{v\} = [N]\{\dot{u}\} \tag{13}$$

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B]\{\dot{u}\} \tag{14}$$

$$\{l\} = [B_{v}]\{\dot{u}\} \tag{15}$$

其中，$[N]$为形函数，$\{\dot{u}\}$表示节点速度，$[B]$和$[B_v]$分别表示应变率—速度关系矩阵和应变梯度—速度关系矩阵。

将（13）、（14）和（15）式代入（11），可以经过标准的离散过程形成单元刚矩阵，然后再经过组装最后可得总体有限元方程

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta F\} \tag{16}$$

其中，

$$[K] = \sum_{(e)} \int_{V^{(e)}} [B]^T \left([D_{ep}] - [F]\right)[B] dV + \sum_{(e)} \int_{V^{(e)}} [B_v]^T [Q][B_v] dV \tag{17}$$

式中，$[K]$为总体刚度矩阵，$\{\Delta u\}$表示总体节点位移增量，$\{\Delta F\}$表示总体节点力增量，而$[Q]$为由当前应力状态决定的应力修正矩阵[15]。

1.4 接触界面约束处理

设工具表面的曲线方程为：$y = g(x)$，板料与工具的接触点的法向速度应该相等：

$$\dot{u}_n^{板} = \dot{u}_n^{工具} \tag{18}$$

设接触点处模具表面的法向为$\vec{n}$，则有

$$\vec{\dot{u}}^{板} \cdot \vec{n} = \vec{\dot{u}}^{工具} \cdot \vec{n} \tag{19}$$

其中，$\vec{n} = (\frac{dg/dx}{\sqrt{1+(dg/dx)^2}}, 1)$。

为了更好地比较两种强化模型的计算结果，消除摩擦力的影响，因此在计算中不考虑板料与工具之间的摩擦。

2. 计算结果及讨论

板料在拉伸筋处的变形过程分为两个阶段。首先随着压边圈的闭合，板料包络在拉伸筋上，此过程称为拉伸筋的闭合阶段；然后随着冲头的运动，板料通过拉伸筋，经过一系列弯曲与反弯变形后向凹模内流动，此过程称为拉伸筋的拉曳过程。在拉曳过程中牵曳端所需的力即为拉伸筋阻力。

为了更好地反映板料的弯曲变形，在计算中采用两层八节点平面应变单元，板料的有限元网格及工具的构形如图 2 所示。

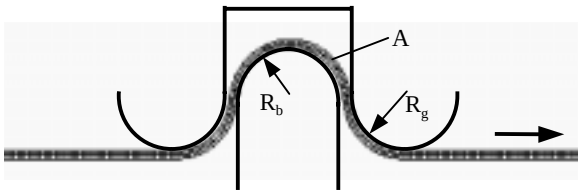


图 2　有限元网格及工具几何构形

首先针对 Nine[8]的实验中的一种工况进行了模拟计算。材料为 A-K 钢，材料的特性如表 1 所示。在计算中取图 2 中的$R_b = R_g = 5.5mm$，板厚取$0.86mm$。分别采用等向强化模型与运动强化模型进行计算。表 2 所示为材料在拉曳阶段 A 处一单元高斯点的几个应力分量的变化情况，由此可以看出板料在拉伸筋处变形过程中经历的加卸载过程。图 3 所为在拉伸筋闭合阶段垂直方向上的闭合力的变化曲线。图 4 所示为拉伸筋阻力曲线，从图中可以看出采用运动强化模型的计算结果与实验更吻合，两种强化模型的计算结果相差大约 10%。

表 1　A-K 钢的材料特性

弹性模量	$200GPa$
泊松比	0.3
单向拉伸的硬化法则	$\bar{\sigma} = 516\bar{\varepsilon}^{0.23}$

表 2　应力分量变化过程

拉曳位移（mm）	应力分量（MPa）		
	σ_{11}	σ_{22}	σ_{12}
0.005	212	76	-101
1.0	16	82	-38
2.0	-34	128	-136
3.0	-248	-42	77
4.0	-136	185	-1
5.0	-63	249	-73

然后取图 2 中几何参数 $R_b = R_g = 4.0mm$，材料仍为 A-K 钢，但板厚取 1 mm，再进行计算。

图 5 所示为闭合阶段的闭合力变化曲线，图 6 所示为拉曳阶段两种强化模型计算的拉伸筋阻力的比较情况。从图中可以看出两者相差将近 30%。这是由于随着板料变厚，工具圆角变小，板料在工具圆角处的弯曲效应越明显，因而采用两种不同的强化模型的计算结果相差越大。

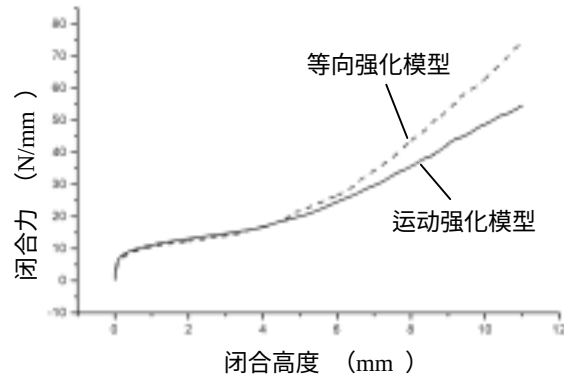


图 3　算例 1 中两种强化模型的闭合力计算结果比较

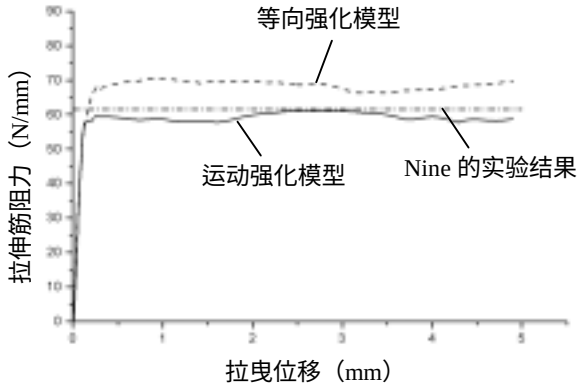


图 4　算例 1 中两种强化模型的拉伸筋阻力计算结果比较

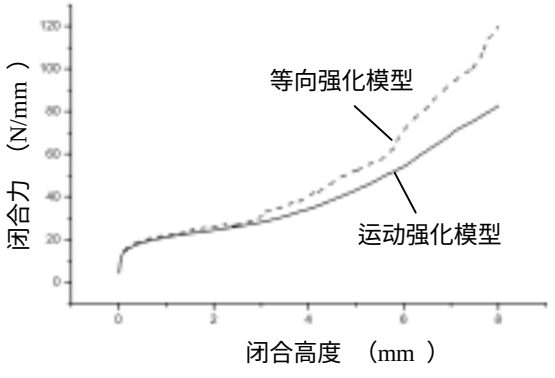


图 5　算例 2 中两种强化模型的闭合力计算结果比较

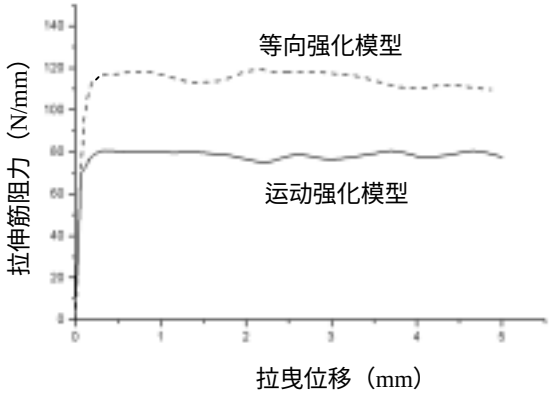


图 6　算例 2 中两种强化模型拉伸筋阻力计算结果比较

3. 结 论

在本文中，为了更好地反映板料在拉伸筋处的变形中的 Bauschinger 效应，将有限变形条件下的 Ziegler 运动强化 J2F 本构模型引入 U.L.弹塑性有限元列式当中 ，对拉伸筋阻力进行了计算，并与各向同性强化模型的计算结果进行了比较，可以得到以下结论：

（1） 采用运动强化模型更好地反映了板料在拉伸筋处的弯曲反弯过程，可以更准确地预测拉伸筋阻力。

（2） 板料在拉伸筋处弯曲效应弯曲效应越明显，采用两种强化模型的计算结果相差越大。

参 考 文 献

1 Triantafyllidis N., Maker B. and Samanta S. K. An analysis of drawbead in sheet metal forming part 1 －problem formulation", ASME, J. Engng. Mater. Tech., 1987, 108: 321-327

2 Choi T. H., Huh H., et al. Drawbead simulation by an elasto-plastic finite element method ith directional reduced integration, J. of Mater. Process. Technol., 1997, 63: 667- 671

3 Sunaga H, Makinouchi A. Drawbead Restraining Force for Different Drawbead Shapes—Study on Drawbead Restraining Force in Sheet Metal Forming I, 塑性と加工，1998：39: 62- 66

4 Sunaga H, Makinouchi A. Drawbead Restraining Force for Different Drawbead Shapes—Study on Drawbead Restraining Force in Sheet Metal Forming II, 塑性と加工，1998：39: 67-71

5 吴建平，板材成形过程中直拉伸筋作用的数值模拟，华中理工大学学报，1991，19: 67-72

6 Weinmann K. J., et. al. The Bauschinger effect of sheet metal under cyclic reverse pure bending, Annals of the CIRP, 1988, 37：289-293

7 Tvergaard V., Effect of kinematic hardening on localized necking in biaxially stretched sheets, Int. J. Mech. Sci., 1978, 20: 651- 658

8 Nine H. D. Drawbead forces in Sheet Metal Forming, Mechanics of Sheet Metal Forming, Wang, N. M. (ed.), Plenum, New York, 1978: 179-207

9 Prager W. A new method of analysing stress and strain in workhardening plastic solids, J. Appl. Mech., 1956, 23(4): 493-196

10 Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule, Quart. Appl. Math., 1959, 17: 55-65

11 王勖成，邵敏，有限单元法基本原理与数值方法，清华大学出版社，1997

12 黄克智，非线性连续介质力学，清华大学出版社，北京大学出版社，1989

13 蒋有谅，非线性有限元法，北京工业学院出版社，1988

14 McMeeking, R. M. and Rice, J. R., Finite element formulation for problems of large elastic-plastic deformation, Int. J. Solids Structures, 1975, 11: 601-615

15 富田佳宏 著，胡平等译，数值弹塑性力学，吉林省科学技术出版社，1995