

机加工表面轮廓分形维数的两种计算方法

天津大学精仪系 李成贵

太原工业大学机械系 刘 杰 郎青山

[摘要] 基于 $W-M$ 分形函数提出了机加工表面轮廓分形维数的两种实用算法, 即功率谱法和结构函数法。通过使用具有已知分形维数的 $W-M$ 函数离散数据计算的结果表明, 结构函数法比功率谱算法准确, 并且用两种算法分析了车削加工表面轮廓分形维数 D 与 Ra 之间的关系, 进而表明 Ra 值越小, D 值越大, 此时的表面微观结构越精细。

关键词: 表面轮廓 粗糙度 分形维数

[Abstract] Two optional methods, the power spectrum method and the structure function method, for the calculation of the fractal dimension of a machined surface profile are discussed in this paper. Through the analysis of the results calculated by use of the Weierstrass-Mandelbrot fractal function with known fractal dimension, the structure function method is more precision. By two methods, the relation between the fractal dimension D and Ra of the surface profile machined by turning is investigated. In this case, the fractal dimension D increases with decrease of Ra .

Keywords: surface profile roughness fractal dimension

最近, 国内外在表征和研究机加工表面的微观结构、接触机理和表面粗糙度等方面越来越多地使用分形几何理论这一有力的数学工具, 研究表明, 很多种机加工表面呈现出随机性、多尺度性和自仿射性, 即具有分形的基本特征, 因而使用分形几何是合理的、有效的。确定分形的重要参数之一是分形维数, 在机加工表面结构的表征中, 应用最多的也是表面轮廓的分形维数的评价。同时, 分形维数可以衡量机加工表面轮廓的不规则性, 能够提供一些传统的表面粗糙度评定参数 (如 Ra 、 Ry 、 Rz 、 Rq 等) 不能提供的信息。美国 TopoMetrix 公司生产的扫描探针显微镜 (SPM) 软件体系中, 已将分形维数作为评价表面微观形貌的参数之一。无疑, 分形维数计算结果的准确性直接影响着表面微观形貌分形表征的可靠性。

本文基于 Weierstrass-Mandelbrot ($W-M$) 分形函数提出了机加工表面轮廓分形维数的两种实用算法, 即功率谱算法和结构函数算法, 并给出了计算实例。

1 功率谱算法

功率谱算法也称为频谱法, 该法广泛用于时间序列和工程表面的分形维数计算。首先由离散数据的 FFT 变换得到数据列的功率谱, 分析功率谱 $P(\omega)$

和频率 ω 之间的关系是否符合式 (1):

$$P(\omega) \propto \omega^{-\beta} \quad (1)$$

而指数 β 与分形维数 D 有关。

在机加工表面轮廓的表征中应用较多的是 $W-M$ 分形函数, 它具有连续性、和自仿射性, 是表示随机轮廓的典型函数。

分形维数为 D 的 $W-M$ 函数形式如下:

$$Z(X) = G^{(D-1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{-n(2-D)} \cos(\gamma^n X) \quad (1 < D < 2, \gamma > 1) \quad (2)$$

式中: $Z(X)$ ——随机表面轮廓高度;

G ——特征尺度系数;

γ ——常数;

D ——分形维数。

式 (2) 的连续谱为:

$$P(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \gamma} \cdot \frac{1}{\omega^{(5-2D)}} \quad (3)$$

在机加工表面的分析中, 式中 ω 为空间频率, 与式 (1) 相比较

$$D = \frac{5 - \beta}{2} \quad (4)$$

具体计算, 可作出 $\log P(\omega) - \log \omega$ 图, 用最小二乘法估计 $\log - \log$ 图的斜率 β , 由式 (4) 计算分形

维数。

尽管式(4)是根据W-M分形函数推出的,但对于具有分形特征的随机表面却是通用的。

2 结构函数算法

机加工表面轮廓可以认为是一个随机过程 $Z(X)$,微观轮廓在用高精度(纳米级)轮廓仪测量或在原子力显微镜下观察时,表现出多尺度性和自仿射性,这种属性可以用分数布朗运动(Fractional Brownian Motions)特性进行描述。分数布朗运动遵循下列规律:

$$\langle |B(t_1) - B(t_2)|^2 \rangle \propto |t_1 - t_2|^{2\alpha} \quad (5)$$

式中: $\langle \dots \rangle$ 为时间平均, $B(t)$ 为布朗运动粒子的位置, α 为Hurst指数, $\alpha = 1/2$ 时就是布朗运动状态。

对于随机表面轮廓 $Z(X)$, 我们定义其增量方差为结构函数(Structure function), 即

$$S(\Delta) = \langle |Z(X+\Delta) - Z(X)|^2 \rangle \quad (6)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{x=0}^L |Z(X+\Delta) - Z(X)|^2$$

式中: L 为采样长度, Δ 为过程增量。

将结构函数引入分数布朗运动中推出

$$S(\Delta) \propto |\Delta|^{2\alpha} \quad (7)$$

由此看出, 结构函数与增量 Δ 服从幂定律关系, 而且根据分数布朗运动可推出其分形维数 D , 满足:

$$D = 2 - \alpha \quad (8)$$

特别地, 对于式(2)的W-M分形函数, 其结构函数为

$$S(\Delta) = \langle |Z(X+\Delta) - Z(X)|^2 \rangle$$

$$= \frac{G^{2(D-1)}}{(4-2D) \ln \gamma} \Gamma(2D-3) \sin \frac{(2D-3)\pi}{2}$$

$$|\Delta|^{2(2-D)} \quad (9)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 为gamma函数, 即有关系式

$$S(\Delta) \propto |\Delta|^{2(2-D)} \quad (10)$$

由此可见, 与式(7)的结果一致。

类似于功率谱算法, 作出 $\log S(\Delta) - \log \Delta$ 图, 用最小二乘法拟合成直线, 即可求出斜率 2α 或分形维数 D 。

3 计算实例

3.1 W-M函数的分形维数计算

在本例中离散数据来源于式(11)中的标准W-M分形函数数学模型:

$$Z(X) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{-n(2-D)} (1 - \cos(\gamma^n X)) \quad (1 < D < 2, \gamma > 1) \quad (11)$$

采样时, 选择 $\gamma = 1.5$, $0 < X < 1$, 分形维数 $D = 1.6$, 采样点数为4096, 图1所示为标准函数的轮廓图。由于分形维数已知, 因此本例实际上是对两种分形维数计算方法的检验。由4096个采样数据计算的双对数功率谱(经平滑处理后)如图2所示, 可以发现 $\log P(\omega)$ 和 $\log \omega$ 之间存在线性关系, 最小二乘拟合的直线斜率为1.7, 其分形维数 D 为1.65。

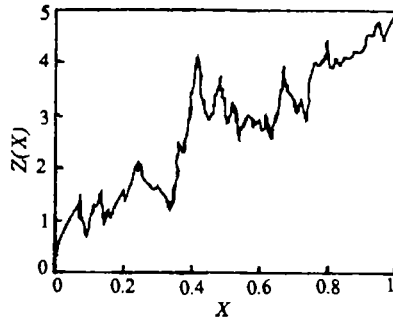


图1 W-M函数轮廓图

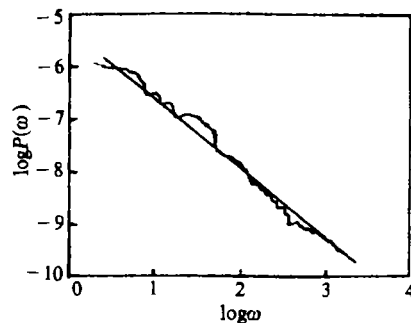


图2 W-M函数功率谱图

图3为双对数结构函数图, 由此计算的分形维数 $D = 1.63$, 因此利用结构函数计算线性度较好, 计算更准确。

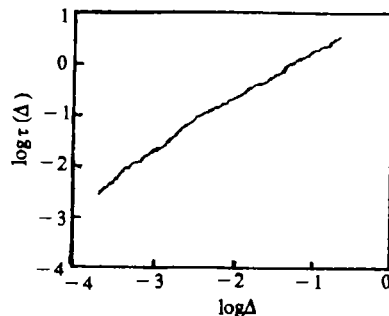


图3 W-M函数的结构函数图

3.2 精车加工表面的分形维数计算

实验采用材料为 45# 钢的 6 块精车加工粗糙度试件, 其表面轮廓用 Talysurf-10 型轮廓仪测量, 金刚石触针半径为 $2.5\mu\text{m}$, 垂直放大倍率为 2000 倍, 取样长度 0.8mm , 测量长度 4mm , 采样点数 4096.

图 4、图 5 和图 6 分别为 3# 试件的轮廓图、双对数功率谱图和双对数结构函数图。

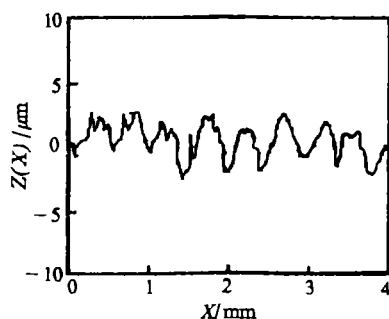


图 4 试件轮廓图

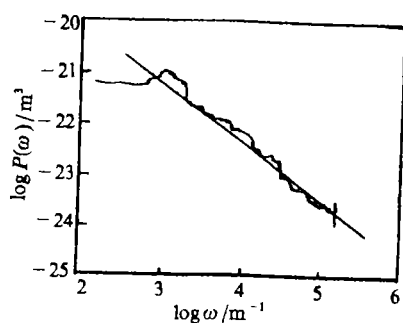


图 5 试件的功率谱图

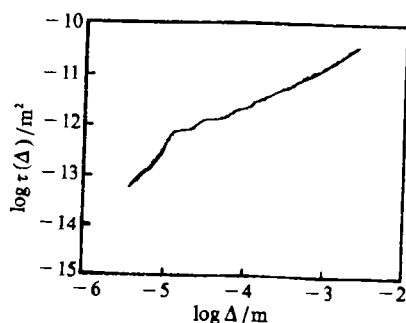


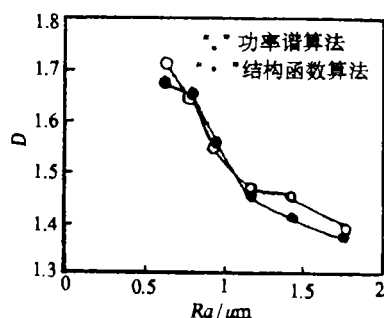
图 6 试件的结构函数图

分别用功率谱法和结构函数法计算的 6 块粗糙度试件的分维值 D 见表 1, D 与 Ra 的关系示于图 7 中。结果表明, 粗糙度数值越低分形维数越大, 则

表面结构越精细。

表 1 精车加工表面的分形维数

试件	Ra	分形维数 D	
		功率谱算法	结构函数法
1	0.58	1.73	1.68
2	0.66	1.66	1.67
3	0.83	1.56	1.56
4	1.21	1.47	1.46
5	1.43	1.46	1.43
6	1.78	1.39	1.39

图 7 分形维数 D 与 Ra 的关系

参考文献

- 1 李成贵, 郎青山, 晏浩. 粗糙表面轮廓的分形维数计算. 现代计量测试, 1993, (3): 25 ~ 29
- 2 Majumdar A, Tien C L. Fractal characterization and simulation of the rough surfaces. Wear, 1990, 136: 313 ~ 317
- 3 Fedar J. Fractals. London: Plenum press, 1988
- 4 李成贵等. 分形表面的结构函数及其应用. 航空测绘技术, 1997, (3)

(收稿日期: 1997-07)