

永磁无刷直流电机空载气隙磁场和绕组反电势的解析计算

摘 要：该文利用许-克变换构造了考虑齿槽效应的气隙相对比磁导函数，该气隙相对比磁导函数反映了齿槽效应对气隙磁场分布的影响，且这种影响的程度随气隙中的径向位置而变化。在忽略铁心饱和的情况下，结合偏微分方程的解析算法，提出了一种考虑齿槽效应的永磁无刷直流电机空载气隙磁场分布和相绕组反电动势的解析计算方法。计算结果与二维有限元计算结果对比，其计算波形和大小吻合很好。证明此方法是正确的、可靠的，为永磁无刷直流电机优化设计和性能分析提供了基本分析手段。

关键词：永磁无刷电机；气隙磁场；反电势；解析计算

1 引言

对于永久磁钢表面安装的永磁电机，由于定子铁心开有若干槽，使气隙磁导并非均匀值，从而导致电机气隙磁场并非理想的梯形波，其中含有幅值较大的齿谐波，当电机旋转时会引起相绕组交链磁链的波动，使相绕组反电势出现波动，进而导致绕组相电流的脉动，引起电磁转矩的波动，最终引起电机的振动和噪声。

可见，要准确计算永磁电机的电磁转矩波动，首先应准确计算电机气隙内的磁场分布，从而可以准确计算出电机相绕组的反电动势变化波形和电机的电磁转矩波动，以确定有效的改进措施和控制策略。而准确计算永磁电机气隙内磁场分布的关键是如何考虑齿槽结构对气隙磁场分布的影响。

在气隙磁场的求解方法中，有限元数值计算方法可以准确计算出气隙磁场的分布波形，具有通用性强、适用于各种媒质的特点。但其前处理过程复杂、计算时间较长，对使用者有较高的技术要求，在电机优化设计中不便采用。解析方法可以较准确地计算气隙磁场分布波形，同时可以观察到气隙磁场分布与结构尺寸之间的关系，具有很大的工程实用价值。文献[1]、[2]利用解析方法对气隙磁场进行计算，求解出气隙磁场的分布波形，但文中忽略了齿槽的影响。文献[3]讨论了永磁电机中定子斜槽（或转子斜极）、永磁体磁化方式、气隙长度、转子半径和永磁体极弧系数对气隙磁场分布的影响，给出计算气隙磁场分布的经验公式，由此计算出相绕组反电动势变化波形，可是文中忽略了齿槽的影响，公式的通用性也较差。文献[4]采用等效磁路的方法构造出考虑齿槽效应的气隙磁导分布

函数，以此求解电机内气隙磁场的分布，但文中等效磁路法默认为齿槽效应对气隙磁场分布的影响程度与气隙内的径向位置无关，这与实际磁场分布有一定偏差^[5]。文献[6]采用部分区域的方法，利用连续边界条件求解齿槽对气隙磁场的影响，但文中忽略了永磁体相对磁导率 m_r 的影响。

本文以许-克变换为基础，构造出考虑齿槽效应的气隙相对比磁导函数，该气隙相对比磁导函数反映了齿槽效应对气隙磁场的影响程度，且这种影响程度随气隙径向位置而变化。在忽略铁心饱和的情况下，本文结合偏微分方程的解析算法，提出了一种永磁无刷直流电机空载气隙磁场分布和相绕组反电势的解析计算方法，其计算结果与有限元计算结果对比，两者吻合很好。证明此计算方法是正确的、可靠的，为永磁电机的设计和性能分析提供了依据。

2 气隙相对比磁导函数

在永久磁钢表面安装的永磁电机（以内转子电机为例）中，定子铁心表面开有若干个槽，转子铁心表面光滑。对于槽数较少的永磁电机，槽口宽与槽距比值较小，在分析一个槽距内气隙磁导变化时，可忽略相邻槽之间的影响；但对于槽数较多的永磁电机，相邻槽之间的影响较大，不能忽略。本文只对槽数较少的永磁电机进行讨论，故可由定子铁心单个槽时的物理模型进行分析。图 1 所示为转子铁心表面光滑、定子铁心单个槽时的物理模型。为便于分析作如下假设：

- (1) 定子铁心表面开槽，转子铁心表面光滑；
- (2) 槽深为无限深；
- (3) 铁心磁导率为无穷大，定、转子铁心表面均为等标量磁位面，一面为 0，另一面为 $\mathbb{W}_0$ ；
- (4) 永磁材料退磁曲线为直线；
- (5) 永磁体以相同磁导率的材料填充。

在图 1 中，若定、转子铁心表面标量磁位差为 $\mathbb{W}_0$ ，利用许-克变换可求得永磁体、气隙

和槽内区域任意点的磁通密度 B 。由于空气、永磁体磁导率为常数，所以任意点磁通密度 B 与定、转子铁心表面之间的标量磁位差 W_0 呈正比关系。参考文献[7]，定义该比例系数 K 为该点对应的等效比磁导 l ，即 $B=W_0 \cdot l$ 。

一个齿距内的气隙磁通密度分布如图 2 所示，其中 B_0 表示气隙磁通密度因开槽而造成的脉振的振幅， S_1 为在气隙半径 r 处一个槽对气隙磁场的影响宽度， t_s 为槽节距。

$$B_0 = \frac{B_{\max} - B_{\min}}{2} \quad (1)$$

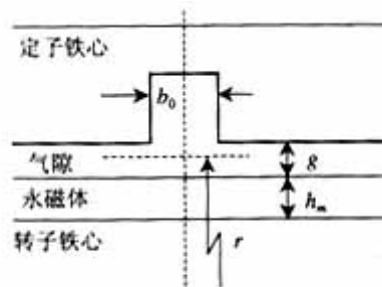


图 1 定子铁心开槽转子表面光滑物理模型
Fig.1 Model of slotted stator and smooth rotor

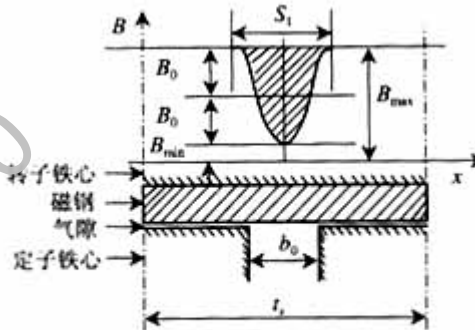


图 2 一个齿距内的气隙磁通密度分布
Fig.2 Distribution of flux density within a teeth pitch

在保证气隙磁通不变的条件下，对图 2 中 S_1 区间内的磁密波形可利用 $[0, 2\pi]$ 区间的余弦函数进行拟合，从图 2 可看出余弦函数的幅值为 B_0 ，周期为 S_1 。由卡特系数的定义可知：

$$S_1 = \frac{\gamma \cdot g'}{\beta(r)} \quad (2)$$

$$\text{式中 } \gamma = \frac{4}{\pi} \left[\left(\frac{b_0}{2g'} \right) \arctan \left(\frac{b_0}{2g'} \right) - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{b_0}{2g'} \right)^2} \right]$$

$$g' = g + \frac{h_m}{\mu_r}$$

在任意气隙半径 r 处:

$$\beta(r) = \frac{B_{\max} - B_{\min}}{2B_{\max}} \quad (3)$$

式中 $B_{\max}$ 为定子齿面下均匀气隙的磁密; $B_{\min}$ 为

沿定子槽中心线上半径 r 处的磁密。

在气隙半径 r 处, 由文献[8]中许-克变换可求得:

$$\beta(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 + (b_0 / 2g')^2 (1 + v^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4)$$

式中 b_0 为槽口宽度;

v 由下式决定:

$$y \frac{\pi}{b_0} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{a^2 + v^2} + v}{\sqrt{a^2 + v^2} - v} \right] + \frac{2g}{b_0} \arctan \frac{2g'}{b_0} \frac{v}{\sqrt{a^2 + v^2}} \quad (5)$$

$$\text{且 } a^2 = 1 + (2g' / b_0)^2$$

对于内转子电机

$$y = r - (R_s - g - h_m) \quad (6)$$

其中 R_s 为定子内径。

由以上分析可得, 永磁电机定子铁心单个槽的气隙比磁导为

$$\lambda(r, \alpha) = \begin{cases} \Lambda_0 \left[1 - \beta(r) - \beta(r) \cos\left(\frac{t_s Q_s}{s_1} \alpha\right) \right] & |\alpha| \leq \frac{S_1 \pi}{t_s Q_s} \\ \Lambda_0 & \frac{S_1 \pi}{t_s Q_s} < |\alpha| \leq \frac{\alpha_t}{2} \end{cases} \quad (7)$$

式中 α 为距槽中心线的空间位置角； α_t 为槽

距角； Q_s 为定子槽数； $\Lambda_0 = \mu_0 / g'$ 。

以齿面下气隙均匀处的比磁导为基值，在气隙半径 r 处，永磁电机单个槽的相对比磁导函数为

$$\tilde{\lambda}'(r, \alpha) = \frac{\lambda(r, \alpha)}{\Lambda_0} = \frac{\lambda(r, \alpha)}{\mu_0 / g'} \quad (8)$$

忽略相邻槽之间的影响，则整个永磁电机的气隙比磁导

分布为周期函数，且周期为 α_t 。在极坐标下，以 a 相绕组轴线为坐标轴，将式(8)进行傅立叶分解得电机等效气隙内在半径 r 处的相对比磁导分布函数为

$$\tilde{\lambda}(r, \alpha) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left[\frac{2\pi}{\alpha_t} k(\alpha + \alpha_{sa})\right] \quad (9)$$

式中 $a_0 = 1 - \frac{S_1}{t_s} \cdot \beta(r)$ ；

$$a_k = -\frac{2}{\pi k} \cdot \beta(r) \cdot \{1 + k^2 / [(t_s / S_1)^2 - k^2]\} \cdot \sin\left(k\pi \frac{S_1}{t_s}\right)；$$

α_{sa} 为 a 相绕组轴线与图 1 中槽中心线之间的空间夹角。

由式(1)~(6)可知：如图 1 所示，在永磁电机定子铁心的槽口区域，对于任意 α 空间位置角，不同的气隙半径 r 处具有不同的 $\beta(r)$ 值。由式(7)可知不同的 $\beta(r)$ 值具有不同的气隙相对比磁导函数值，可见在不同气隙半径 r 处槽对气隙磁场的影响程度并不相同。如图 3 所示，为气隙中定子铁心内圆、气隙平均半径和永磁体表面处的相对比磁导函数分布波形。对比图 3(a)、(b)、(c)可看出气隙相对比磁导与气隙半径的对应关系。



3 空载气隙磁场的计算

在忽略铁心饱和时，永磁电机定子开槽对气隙磁场的影响可用相对比磁导函数加以计算。永磁电机空载气隙磁场可等效为永磁磁极在光滑气隙内产生的气隙磁场与气隙相对比磁导函数的乘积。

当忽略定子开槽的影响时，以永磁磁极 N 极为极坐标轴，永磁磁极在光滑气隙内产生磁场的径向分量为^[9]

当 $np=1$ 时



式中



设在极坐标系下，以 a 相绕组轴线为极坐标轴。当转子 N 极轴线位于 g 角位置时，电机气隙内半径 r 处气隙磁场的径向分量为



4 相绕组反电动势的计算

当永磁无刷直流电机转子旋转时，永磁磁极产生的磁场是旋转的，而定子齿槽是静止不动的，因此电机中空载气隙磁密分布是随转子旋转而变化的。同时每相绕组所交链的磁链也随时间而变化。变化的磁链在相绕组中感生旋转电动势



由于齿槽的影响，会使感生电动势 E 的变化波形中含有一定的波纹。值得注意的是，永磁无刷直流电动机负载工作时，电枢绕组电流含有大量的谐波分量，电枢磁场为跳跃式步进磁场，所以电枢反应磁场也在相绕组中感生电动势（变压器电势），尤其是绕组换向

时电枢磁场的瞬变过程，会产生较大的感生电动势脉冲。本文只讨论空载时绕组的感生电动势。

以集中式绕组为例，设每个线圈节距为 a_y 机械角度，每相绕组串联线圈个数为 N ，当转子 N 极轴线与 a 相绕组轴线重合时为相绕组反电动势的计时起点，即 $t=0$ 时刻，则由式 (11)、(13) 和 (14) 计算出永磁电机 a 相绕组的感生电动势为



式中 a_i 为第 i 个线圈首边的空间位置角； w 为转子角速度； N_c 为单个集中线圈的匝数； $r=w t$ ；



同理利用以上方法，根据绕组的具体排列方式可以计算分布绕组、短距绕组、分数槽绕组等各种绕组形式的相绕组感生电动势瞬时值，进而可计算出瞬态的绕组线电势和电枢绕组电流等参数。

5 解析计算结果分析比较

为了验证本计算模型的有效性，本文利用以上计算方法，对一台 6 极、9 槽，齿面加两个辅助凹槽的永磁无刷直流电机的空载气隙磁场和相绕组感生电动势进行解析计算，同时利用二维有限元对其进行计算，两者结果进行比较如图 4 所示。图中气隙磁密分布波形含有较大的齿波纹，波形上凸处对应齿的位置，波形下凹处对应槽的位置。比较图 4 (a) 和 (b) 的曲线可看出：在气隙中，不同径向位置齿槽对气隙磁密的影响程度不同，即气隙中不同径向位置的相对比磁导不同，这与前面的分析结果是一致的。在定子齿边缘处有限元计算值较解析计算值稍大，这是由于在定子齿边缘处磁场具有聚磁效应，使该处的磁密变高，并且气隙半径越接近定子齿，这种聚磁效应越明显。上述解析解不能精确考虑聚磁效应，除此以外，解析计算波形其余各点均与有限元结果相吻合，从图中可看出本解析计算结果与二维有限元计算结果吻合较好，可见本解析计算方法是准确的、可靠的。

图 5 为该永磁无刷直流电机在 1500r/min 时，电机相绕组的感生电动势波形。上述样机为了减小齿槽定位力矩，在定子齿面上加两个辅助凹槽，由于齿槽对气隙磁场分布的影

响使相绕组反电动势波形中也含有较明显的波纹。从图中还可看出解析计算波形与二维有限元计算结果吻合很好。图 5 中的相绕组电动势齿波纹会引起相绕组电枢电流的脉动，导致电机产生电磁转矩波动。因此电机设计时应考虑齿槽结构对电机的气隙磁场和反电动势的影响，特别是在研究永磁无刷直流电机的转矩波动和消除转矩波动措施时更应该充分考虑这一点。本解析计算方法可以精确考虑齿槽结构对空载气隙磁场和相绕组空载反电动势的影响，可为电机设计和电机的精确控制提供可靠的依据。



6 结论

有限元方法可以精确计算永磁无刷直流电机的磁场分布和相绕组空载感生电动势波形，但是其复杂的前处理和较长的计算时间不便于工程设计应用。本文基于电磁场的分离变量法和许-克变换，建立了考虑齿槽效应的永磁电机气隙磁场的解析计算方法。可以简捷快速地求解空载气隙磁场分布及相绕组空载感生电动势变化波形，并较好地反映了齿槽结构与电机空载气隙磁场分布和相绕组空载感生电动势变化波形的对应关系，为精确分析计算电机的各种工作特性提供了可靠的依据。

参考文献

- [1]Boules N. Prediction of no-load flux density distribution in PM machines[J]. IEEE Trans. On Industrial Application, 1985, 21(4): 1A-21: 633-643.
- [2]陈阳生, 林友仰 (Chen Yangsheng, Lin Youyang). 永磁电机气隙磁密的分析计算 (Calculation of air-gap flux density in permanent magnet motors) [J]. 中国电机工程学报 (Proceedings of the CSEE). 1994, 14(5): 17-26.
- [3]Sebastian T. Analysis of induced EMF waveforms and torque ripple in a brushless permanent magnet machine[J]. IEEE Trans. On Industry Appl. 1996,

32(1): 195-200.

[4]Zhu Z Q, Howe D. Analytical prediction of the cogging torque in radial-field permanent magnet brushless motors[J]. IEEE Trans. On Magnetics, 1992, 28(2), 1371-1374.

[5]程福秀, 林金铭 (Cheng Fuxiu, Lin Jinming). 现代电机设计 (Design of modern electric machines) [M]. 北京: 机械工业出版社 (Beijing: China Machine Press), 1993.

[6]Gu Q, Gao H. Effect of slotting in PM electrical machines [J]. Electrical Machines and Power Systems, 1985, 10(3): 273-284.

[7]励鹤鸣, 励庆孚 (Li Heming, Li Qingfu). 电磁减速式电动机 (Electromagnetic reduction motors) [M]. 北京: 机械工业出版社 (Beijing: China Machine Press), 1982.

[8]胡之光 (Hu Zhiguang). 电机电磁场的分析与计算 (Analysis and calculation of the magnetic field of the electrical machines) [M]. 北京: 机械工业出版社 (Beijing: China Machine Press), 1989.

[9]王兴华, 励庆孚, 王曙鸿 (Wang Xinghua, Li Qingfu, Wang Shuhong). 永磁无刷直流电机磁阻转矩的解析计算方法 (Analytical calculation of cogging torque in brushless DC motor) [J]. 中国电机工程学报 (Proceedings of the CSEE) [J]. 2002, 22(10): 104-108.

中国电机工程学报