

文章编号:1672-058X(2006)01-0081-04

# CNC 刀具偏移的轨迹跟踪算法探讨

陈善国

(重庆工商大学 机械与包装工程学院,重庆 400067)

**摘要:**在 CNC 加工中,刀具运动轨迹的插补算法是一个重要的技术问题。对此,介绍了一种轨迹跟踪算法,即用几何属性定义轨迹,通过重复应用双可析执行结构来生成在要求路径(偏移)上一系列连续的点;该算法能适应要求路径的可析表达式是可得的情况,它能保证最大一步轨迹位置的误差。

**关键词:**刀具偏移曲线;刀具路径母线;CNC 插补

**中图分类号:**TH 164

**文献标识码:**A

在 CNC 加工中,刀具偏移曲线的生成是众所周知的难题,计算路径是刀具中心(在 CNC 铣床)或刀具环状尖端中心(CNC 车床)的轨迹,当加工的轮廓是连续刀具位置的包络时(图 1),计算路径是刀具半径或刀尖半径离给定轮廓形状的偏移。

Farouki 和 Neff<sup>[1,2]</sup> 已经对刀具轨迹偏移(以下简称刀具偏移)的属性进行了广泛深入的研究,其中一个基本的规律是:一个刀具偏移曲线和工件轮廓母线(以下简称母线)有共同的法线,并且也有共同位置切矢方向。对工件轮廓母线上每一点  $p(x, y)$ , 相应的刀具偏移点  $P(X, Y)$  定义为  $P = p + dn$ , 这里  $n$  是工件轮廓母线上  $p$  点的单位法矢量,  $d$  是偏移距离(即刀具半径)。用参数格式表示点坐标为:

$$X = x + \frac{dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; Y = y + \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (1)$$

式(1)可解出两种不同方向的刀具偏移位置坐标,其方向可根据刀具相对零件母线的侧面方向来确定。

大多数模拟算法假想特殊的母线函数和试图利用母线函数的特性来达到精确性和功效,应用重复再分过程来生成偏移分段,这种方法进一步细分直到达到精度标准要求。

## 1 轨迹跟踪概念

从初等几何学讲,充当母线的轨迹用一种几何学属性来定义,在刀具偏移轨迹上各点和母线上各点之间有对应的关系。图 2 以椭圆为例,展示了用传统几何学作图法来构造刀具偏移轨迹上连续点的方法。

假设椭圆焦点为  $F_1, F_2, F_1, F_2$  两点与椭圆上任意点间的距离和为  $a$ , 偏移距离  $d$  (即刀具半径) 是已知的。以  $F_1$  为圆心、 $a$  为半径画圆弧  $C, F_1, F_2$  和圆  $C$  将作为椭圆和偏移轨迹的生成器,用椭圆上的  $E_1$  点获得对

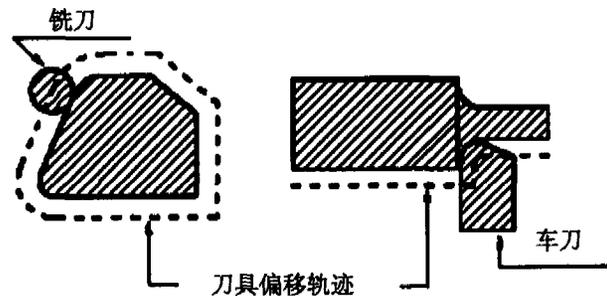


图 1 在 CNC 加工中的刀具偏移路径

应的偏移点。选择点  $G_1$  ( $C$  圆上) 和  $F_1, F_2$  构成三角形  $F_1G_1F_2$ 。从  $G_1F_2$  的中点画一条直线  $L_1$  垂直于  $G_1F_2$ 。点  $E_1$  是  $L_1$  与三角形的另一侧  $F_1G_1$  在椭圆上的交点。为了证明它, 观测由位于法线  $G_1F_1$  上的  $E_1$  点通过  $G_1F_2$  的中点,  $E_1F_2 = E_1G_1$  和  $F_1E_1 + E_1F_2 = F_1E_1 + E_1G_1 = a$ , 这是几何学上椭圆的定义。也可证明  $L_1E_1$  与椭圆相切, 对应的偏移点可被定义, 通过  $E_1$  作  $L_1$  的法线, 在其上距  $E_1$  为  $d$  的点就是刀具偏移点。从工件轮廓母线上的对应点按固定步长的原则选择下一点, 并通过该点作图, 生成刀具偏移轨迹上的对应点, 重复该过程可得到对应工件轮廓母线的刀具偏移轨迹。

轨迹跟踪方法可以概述为: 偏移的逐段分解近似搜索的替代, 可采用分解概念和轨迹定义来陈述两种不同的构造操作(其基于 Danielson 标准)。首先, 沿偏移确定下一点, 通过选取在 8 分象限增量候选步中最好的一步, 以保证与数字技术的兼容性; 第 2 步是从新的偏移位置作法线到工件轮廓母线来获得对应的母线点。每一次循环时, 替换刀具偏移轨迹和母线点坐标, 保证刀具偏移轨迹属性在整个跟踪过程中保持不变。

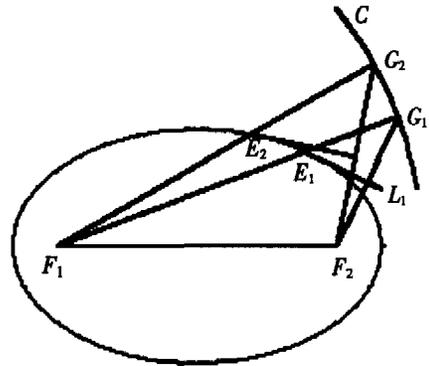


图 2 确定椭圆及其刀具偏移点的作图法示意图

## 2 步长选择问题的公式化表示

曲线跟踪的核心是步长选择问题, 步长通常用向量  $dP$  (在一简单循环中沿指定路径的位移) 表示。在每一次循环时的主要目标是计算  $dP$  和替换坐标以及其他中间变量, 为下一次循环作准备。由于偏移曲线是按刀具中心点的实时轨迹生成的, 一个附加任务是完成按规定的的时间间隔  $\Delta t$  计算步长  $dP$ 。在脉冲参考算法中, 步长是沿一个坐标轴的微小的固定增量(减量), 定义为基本长度单元 BLU。例如, 对 CNC 车床,  $1\text{BLU} = 1 \sim 10 \mu\text{m}$ 。

图 3 演示了步长选择过程, 在每一次循环, 候选步长的集合用向量表示如下:

$$dP = [dX, dY]; dX, dY \in [-e, 0, e]; |dX| + |dY| \geq 1 \quad (2)$$

这里  $e = 1\text{BLU}$ , 每一点的可能步长选择方向数是 8。

Danielson 原则的步长

选择标准: 最优的步长是 1 BLU, 最大优化值  $T_i d_p$  沿当前切线  $T_i$  方向, 与此同时, 它满足了近似标准。近似标准的执行要求用近似方程(函数), 近似方程是从偏移的固定属性中推导出来的。

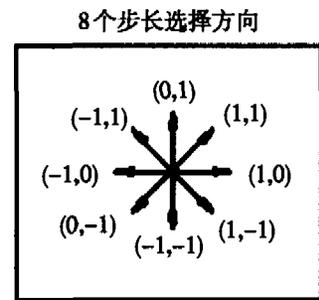
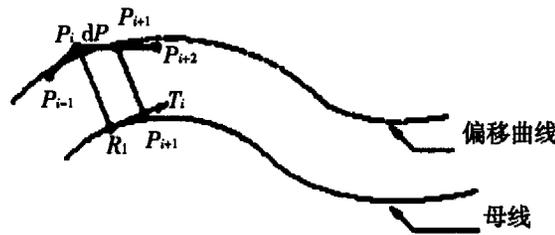


图 3 步长选择过程示意图

$$p(P - p_i)^2 - d^2 = (X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 - d^2 \quad (3)$$

注意, 当  $P$  位于  $p = 0$  的偏移时,  $P$  增加  $p$  也绝对增加。步长的选择受式(2) 限制,  $p$  是一个近似值, 可以从微分方程

$$\Delta p = p_x dX + p_y dY = 2(X_i - x_i) dX + 2(Y_i - y_i) dY \quad (4)$$

求解出。为了满足近似要求,  $dP$  必须指向偏移轨迹。用代数学术语,  $p$  值应逐渐趋于 0 值。如果  $p > 0$  则  $\Delta p < 0$ ,  $p < 0$  或  $p\Delta p < 0$  则  $\Delta p > 0$ , 由此, 如果  $T_i$  是当前位置的切矢量, 步长选择可用有约束优化问题来表述。

$$\text{Max } T_i dP$$

$$\text{目标函数} \begin{cases} \Delta p \geq 0, p < 0 \\ \Delta p < 0, p \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

通过式(2)(4)及当前位置切矢量的表达式可得到隐含式。隐含式依靠母线函数表示法(方程表示法)。如果母线是用隐函数  $f(x, y) = 0$  表示的,则  $T_i = [f_x, -f_y]$ ,步长选择问题变为:

$$\text{Max } f_x dX - f_y dY$$

$$\text{目标函数} \begin{cases} (X_i - x_i) dX + (Y_i - y_i) dY \geq 0 & dX, dY < 0 \\ (X_i - x_i) dX + (Y_i - y_i) dY < 0 & dX, dY \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

用参数表示母线函数  $x = u(t), y = v(t), T_i = [u', v']$  问题可用下式求解:

$$\text{Max } u' dX - v' dY$$

$$\text{目标函数} \begin{cases} (X_i - u_i) dX + (Y_i - v_i) dY \geq 0 & dX, dY < 0 \\ (X_i - u_i) dX + (Y_i - v_i) dY < 0 & dX, dY \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$e$  在目标函数中可被因数提出和降低约束,变量  $dX, dY$  可以从  $[-1, 0, 1]$  集合中取值,为了满足约束,至少有一个值必须为非零。

一个最优步长  $dP$  由等式(6)或等式(7)确定后,通过抛弃一个从最近选择点  $P_{i+1} = P_i + dP$  到母线的法向量,来定位下一个母线点  $p_{i+1}$ ,这一点是可计算出来的。

$$T(P_{i+1} - p) = 0 \quad (8)$$

对  $p$  通过牛顿方法,用  $p_i$  作循环的开始点,再者,特殊情况是依靠母线表达式求解的,对一个隐式表达式,应用牛顿方法来计算  $p_{i+1}$  的坐标  $x = x_{i+1}, y = y_{i+1}$ 。

$$f(x, y) = 0, f_x(X_{i+1} - x) - f_y(Y_{i+1} - y) = 0 \quad (9)$$

对参数化表达式,正常情况是用

$$u'(t)(X_{i+1} - u(t)) + v'(t)(Y_{i+1} - v(t)) = 0 \quad (10)$$

求解在  $t = t_{i+1}$  时的新点  $p_{i+1} = [u(t_{i+1}), v(t_{i+1})]$ 。新  $t$  可从式(10)求解,若用牛顿迭代公式,则采用下面的公式

$$t_{i+1} = t_i - \frac{u'(t)(X_{i+1} - u(t)) + v'(t)(Y_{i+1} - v(t))}{u''(t)(X_{i+1} - u(t)) + v''(t)(Y_{i+1} - v(t)) - u'(t)^2 - v'(t)^2} \quad (11)$$

从图 3 可知,如果偏移点间隔足够小(小于  $e$ ),轨迹属性将保持高精度,并且牛顿方法的应用只需要很少的循环。

正常情况,式(9)或(10)与未知变量  $dX, dY$  的系数有关,在各自的步长选择问题式(6)或(7),可被解释为对这些系数的一种约束。如果  $dX$ (前两个)的系数符号相同, $dY$  的系数必须取相反的符号,反之亦然。用二元整数编程处理这种结构已经被 Papaioannou 和 Kiritsis<sup>[3]</sup> 所证明。最优解用表格法简单检查系数可获得。偏移插补程序的两个流程图如图 4 所示,包括了零件曲线表达式的各自模式(隐含和参数化)。

### 3 结 论

这一算法的开发是基于一种轨迹跟踪概念,该概念利用对偏移的轨迹属性定义的一种数学表达式,包括零件母线和刀具偏移坐标。与独立的自包含刀具偏移坐标表达式比较起来是相对简单的。利用这种简单表达式的微分,近似标准允许坐标增量步长控制偏移,取沿轨迹切向的最大值。由于近似标准目标(每一步朝偏移、位置误差最小的方向)是自动界定的,它还具有以下优点:偏移的逐段和多项式近似是可避免的;对于母线的函数表达式较复杂时,这种方法不会形成死结;偏移转换(式(1))变成不相关。

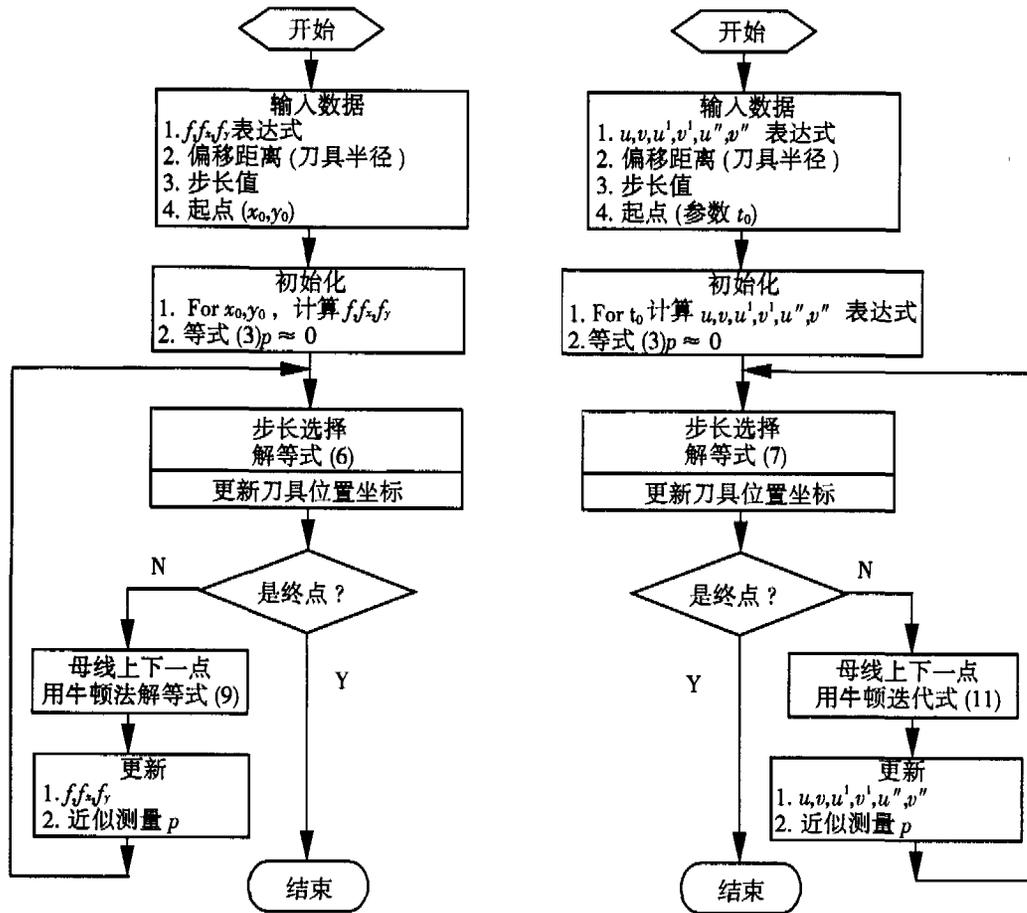


图 4 偏移插补程序的流程图(分别应用于隐函数和参数化定义路径)

#### 参考文献:

- [1] FAROUKI R T, NEFF C A. Analytic properties of plane offset curves[J]. Computer Aided Des, 1990(7):83-90
- [2] FAROUKI R T, NEFF C A. Algebraic properties of plane offset curves[J]. Computer Aided Des, 1990(7):101-27
- [3] SOTIRIS L, OMIROU. A locus tracing algorithm for cutter offsetting in CNC machining[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2004, 20:49-55
- [4] 林金明, 谢明红. 基于图像的刀具路径生成技术[J]. 制造业自动化, 2001, 23(11):49-51
- [5] 屈波. 加工坐标系选择 G54-G59 指令与加工坐标系偏移用法释疑[J]. 重庆工学院学报, 2002, 16(3):46-48

## Consultation about a locus tracing algorithm for CNC cutter offsetting

CHEN Shan-guo

(Department of Mechanics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

**Abstract:** The interpolator algorithm for cutter's motion locus is an important manufacturing technology problem in CNC machining. The locus tracing algorithm, which was introduced in this paper, uses the locus defining geometric property to generate a succession of points on the desired path (the offset), through repeated application of two analytically implemented construction operations. This algorithm is applicable condition in which an analytic expression of the desired path is available, it can be guaranteed a locus position error of one step at most.

**Keywords:** cutter offset curve; cutter path generation; CNC interpolator

责任编辑:李翠薇