

# 拉扭复合加载下循环应力应变关系的研究<sup>x</sup>

尚德广 姚卫星 王德俊

(南京航空航天大学 南京 210016) (东北大学 沈阳 110006)

## 摘 要

以拉扭薄壁管试件为研究对象, 根据多轴临界面上的应力应变特性及多轴疲劳临界面法的研究结果, 结合单轴循环应力应变关系, 研究了多轴比例与非比例加载下的循环应力应变关系, 推导出多轴循环应力应变关系模型, 经拉扭复合比例与非比例循环加载试验验证, 其预测结果与实测值相符合。

关键词: 比例循环加载; 非比例循环加载; 多轴疲劳; 循环应力应变关系

## 1 前 言

对于单轴循环应力应变关系可由 Osgood-Ramberg 方程给出<sup>[1]</sup>, 但对于多轴循环应力应变关系则显得比较复杂, 尤其在多轴非比例加载下, 应力不仅与应变有关, 而且与其加载路径有关。在预测多轴疲劳寿命过程中, 仅依靠应变寿命关系往往得不到较精确的预测结果。只有找出多轴循环应力应变响应关系, 才能够更为准确地估算多轴疲劳寿命。近二十年来, 多轴循环本构理论受到学者们的广泛重视, 并得到了很大发展。但其结果直接应用于疲劳研究却很少。主要原因是大多数多轴循环本构理论相当复杂, 一般是利用塑性增量理论, 如双曲面模型和多曲面模型<sup>[2,3]</sup>, 通过假设几个超曲面的演化和定义一个非比例度来模拟多轴循环应力应变响应。其中经过较复杂的数值模拟且需确定大量的材料常数, 在工程应用中受到一定的限制。

本文在多轴临界面研究的基础上, 针对拉扭薄壁管试件, 推导出一种比较简单多轴循环应力应变关系, 其结果可直接用于多轴疲劳研究。

## 2 多轴比例加载下循环本构关系

单轴循环应力应变关系由 Osgood-Ramberg 方程可知:

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma_R}{2E} + \left( \frac{\sigma_R}{2K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1)$$

x 国家自然科学基金、航空科学基金、航空高校自选课题资助项目

来稿日期: 199708227; 修回日期: 199807209

其中:  $K$ ,  $n$  分别为单轴循环强度系数和循环应变硬化指数,  $E$  为弹性模量。

对于多轴循环加载, 试验研究表明<sup>[4,5]</sup>, 材料屈服面的扩张或收缩标志着材料的硬化或软化。因此对于多轴比例加载, 可以将多轴塑性应变与应力的关系写成如下形式:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = F(R_{eq}) S_{ij} \quad (2)$$

其中:  $S_{ij}$  为应力偏量,  $R_{eq}$  为等效应力, 其形式分别为:

$$S_{ij} = R_j - R_k D_j \delta_{ij} \quad (3)$$

$$R_{eq} = (3\delta_{ij} S_{ij} S_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

式(2)写成幅度的形式为:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = F(R_{eq}) S_{ij} \quad (5)$$

从上式可以看出, 如果能找出函数  $F(R_{eq})$ , 即可得到多轴应力应变关系。试验研究表明<sup>[8]</sup>, 多轴比例加载下的等效循环应力应变关系与单轴加载情况是一致的, 即可由单轴得出的循环应力应变关系可以描述比例加载下的等效应力应变曲线, 则:

$$\dot{\epsilon}_{eq}^p = R_{eq} \dot{\epsilon}^p + (R_{eq} \dot{\epsilon}^p)^{\frac{1}{n}} \quad (6)$$

$$\dot{\epsilon}_{eq}^p = (R_{eq} \dot{\epsilon}^p)^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

其中:

$$\dot{\epsilon}_{eq}^p = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$R_{eq} = \left( \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$S_{ij} = R_j - R_k D_j \delta_{ij} \quad (10)$$

由式(7), (8), (9), (10) 可得多轴塑性应变分量与偏应力范围之间的关系:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = (3(R_{eq})^{(1-n)\delta_{ij}} \dot{\epsilon}^p (2K)^{\frac{1}{n}}) S_{ij} \quad (11)$$

从上式可以看出, 式(5) 中的函数  $F(R_{eq})$  为:

$$F(R_{eq}) = 3(R_{eq})^{(1-n)\delta_{ij}} \dot{\epsilon}^p (2K)^{\frac{1}{n}} \quad (12)$$

该函数的变化影响着多轴应力应变关系。

对于多轴弹性应变范围分量可由推广的虎克定律给出:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = (1 + \nu) \frac{R_i}{E} - \nu \frac{R_k}{E} D_i \quad (13)$$

由式(11) 与式(13) 相加即可得到多轴比例加载下的循环应力应变在稳定状态下的关系:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{R_i(1 + \nu)}{E} - \frac{\nu R_k D_i}{E} + [3(R_{eq})^{(1-n)\delta_{ij}} \dot{\epsilon}^p (2K)^{\frac{1}{n}}] S_{ij} \quad (14)$$

其中:  $\nu$  为泊松比。

### 3 多轴非比例加载下循环本构关系

从物理意义的角度来说, 非比例加载下的循环本构关系与比例加载情况的不同之处主要反映在函数  $F(R_{eq})$  的变化上。

对于单轴其应变寿命公式为:

$$\frac{\$E}{2} = \frac{R_f}{E} (2N_f)^b + E_f (2N_f)^c \quad (15)$$

根据多轴疲劳临界面法的研究结果<sup>[7,8]</sup>, 对于比例与非比例加载, 控制疲劳损伤统一参量为:

$$\frac{\$E_q^r}{2} = [(\frac{E_q^r}{E})^2 + 1 \ddot{3} (\$G_{\max})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

其中,  $\$G_{\max}$  为临界损伤平面上的最大剪切应变范围,  $E_q^r$  为临界面上两个最大剪切应变折返点之间的法向应变程, 其详细定义可见文献[9]。

用  $\$E_q^r$  来代替式(15)中的  $\$E$  即可得到多轴非比例加载下的疲劳寿命公式, 经引用国内外大量多轴疲劳试验数据验证表明<sup>[7,8]</sup>, 用式(16)建立的多轴疲劳寿命关系式具有较高的预测精度。同理也可以用  $\$E_q^r$  代替式(1)中的  $\$E$  来求其等效应力幅  $\$R_q^{NP}$ , 即:

$$\frac{\$E_q^r}{2} = \frac{\$R_q^{NP}}{2E} + (\frac{\$R_q^{NP}}{2K})^{\frac{1}{n}} \quad (17)$$

$$\text{或写成如下形式:} \quad \$R_q^{NP} = K (\$E_q^r)^n \quad (18)$$

其中:  $K, n$  为单轴材料常数。

对于多轴非比例加载下的循环等效应力应变关系, 同样可以由单轴公式推广来得到:

$$\frac{\$E_q^{NP}}{2} = \frac{\$R_q^{NP}}{2E} + (\frac{\$R_q^{NP}}{2K_{NP}})^{\frac{1}{n_{NP}}} \quad (19)$$

其中:  $K_{NP}, n_{NP}$  分别为非比例加载下的循环强度系数和循环应变硬化指数。

试验研究表明<sup>[6]</sup>, 非比例加载下, 循环应变硬化指数变化很小, 因此可以认为非比例加载只对材料的屈服强度有影响, 而不改变材料的循环硬化指数。则式(19)中的  $n_{NP}$  可由单轴加载下的  $n$  来代替, 即:

$$\frac{\$E_q^{NP}}{2} = \frac{\$R_q^{NP}}{2E} + (\frac{\$R_q^{NP}}{2K_{NP}})^{\frac{1}{n}} \quad (20)$$

在应变控制加载下, 可由式(18)与式(20)联立, 即可得到某种加载路径下的非比例循环强度系数  $K_{NP}$ 。再将其代入式(12)中得:

$$F_{NP} (\$R_q^{NP}) = \frac{3 (\$R_q^{NP})^{\frac{(1-n)}{n}}}{(2K_{NP})^{\frac{1}{n}}} \quad (21)$$

同样按照比例加载下的推导方式可得到多轴非比例加载下的循环应力应变关系(稳定状态):

$$\$E_j^{NP} = (1 + M \frac{\$R_{ij}^{NP}}{E} - MD_j \frac{\$R_{ij}^{NP}}{E} + [\frac{3 (\$R_{ij}^{NP})^{\frac{(1-n)}{n}}}{(2K_{NP})^{\frac{1}{n}}}] \$S_{ij}^{NP} \quad (22)$$

从以上推导可以看出, 本文给出的多轴应力应变关系模型, 所有的材料常数可由单轴试验来得到, 或由推导计算出来, 不需做昂贵的多轴试验来确定常数, 因而便于工程应用。

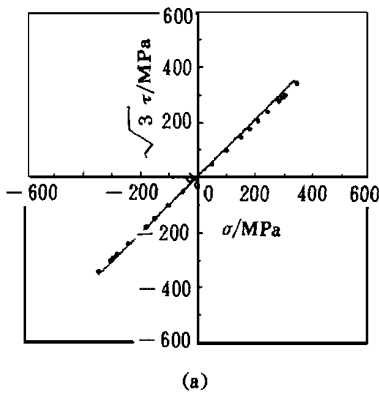
## 4 试验验证及讨论

为了考查本文提出的多轴循环应力应变关系的正确性, 采用比例加载路径 ( $\$E_q = 0.18\%$ ), 圆形路径 ( $\$E_q = 0.8\%$ ), 与 45° 椭圆形路径 ( $\$E_q = 0.7\%$ ), 进行试验验证, 试验

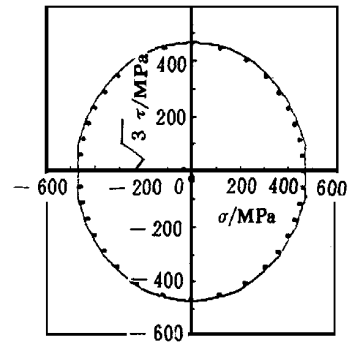
在 MTS8092250 kN 拉扭疲劳试验机上进行, 室温空气介质, 拉扭复合控制应变加载, 对于拉 ~ 扭薄壁管试样, 在拉 ~ 扭加载下, 其应变与应力张量为:

$$\begin{bmatrix} E & \frac{1}{2}M & 0 \\ \frac{1}{2}C & -ME & 0 \\ 0 & 0 & -NE \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中:  $E, C, R, S$  分别为应变与应力幅值。



(a)



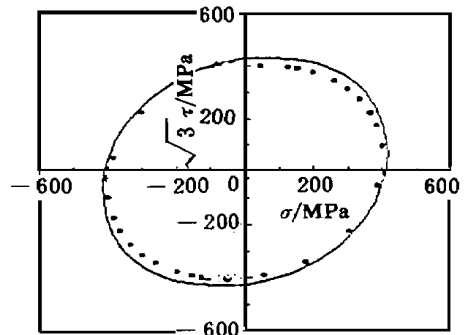
(b)

具体试验过程详见文献[8], 由式(14)与式(22)所得的预测结果与试验结果的比较如图1所示。可见两者吻合较好, 完全可满足工程要求(正火45号钢材常数  $K = 880 \text{ MPa}$ ),  $n = 0.140$ ,  $E = 190000 \text{ MPa}$ 。

(a) 比例路径 ( $E_{\sigma} \sigma = 0.8\%$ )。 (b), 圆形路径 ( $E_{\sigma} \sigma = 0.8\%$ )。 (c) 椭圆形路径 ( $E_{\sigma} \sigma = 0.7\%$ )。

预测值 —— 实测应力响应路径。

应当指出, 本文推导过程中是假设材料完全具有Masing效应的基础上进行的, 对处理非Masing材料, 应当进一步修正。但从本文的预测结果来看(正火45号钢属于非Masing材料), 该模型是可以直接应用的。不必再进行确定Masing材料常数以及做一些复杂的修正, 从工程应用的角度来看是完全可以接受的。



(c)

图1 应力响应(稳定状态)预测值与试验值比较

## 5 结 论

- 1) 在单轴循环应力应变关系的基础上, 推广导出多轴比例加载下的循环应力应变关系。
- 2) 结合临界面法研究的结果, 推导出多轴非比例加载下的循环应力应变本构关系, 并进行了试验验证。

## 参 考 文 献

- 1 Osgood C C. Fatigue Design. Cranbury, New jersey, USA: Pergamon press, 1882: 77
- 2 Doong S H, Socie D F. Constitutive modeling of metals under nonproportional cyclic loading. Trans. ASME J Engng Mater Tech., 1991, 113: 23~ 30
- 3 McDowell D L, Socie D F, Lamba H S. Multiaxial nonproportional cyclic deformation, In: Ed by C. Amzallay and B. N. Leis, Low Cycle Fatigue and Life Prediction, ASTM STP770, Philadelphia, Pa., 1982, 500~ 518
- 4 Ellyin F, Neale K W. Effect of cyclic loading on the yield surface. Trans, ASME J Pressure Vessel Tech, 1979, 101: 59~ 63
- 5 Ellyin F. A cyclic constitutive relation for multiaxial stress states. In: Edited by K2T Rice, Low Cycle Fatigue and Elastoplastic Behaviour of Materials. The second Inter Conf on Low Cycle Fatigue and Elastoplastic Behaviour of Materials. Munich FRG, 1987, London and New York: Elsevier Applied Science, 1987: 165~ 169
- 6 Kanazawa K, Miller K J, Brown M W. Cyclic deformation of 1% CrMoV steel under out of phase loads. Fatigue Engng Mater Struct, 1979, 2: 217~ 222
- 7 尚德广, 王德俊, 周志革. 一种新的多轴疲劳损伤参量. 1 东北大学学报, 1997, 18(2): 133~ 137
- 8 尚德广. 1 多轴疲劳损伤分析与寿命预测研究 [学位论文]. 沈阳: 东北大学, 1996
- 9 Wang C. H. and Brown M. W. A path independent parameter for fatigue under proportional and nonproportional loading. Fatigue Fract Engng Mater Struct, 1993, 16(1): 1285~ 1298

velocities along the depth between existing water jets and non-existing water jets. Turbulent structures and deformation of riverbeds caused by water jets will be studied in another paper.

Keywords: *water jets, non-uniform flow, water surface gradients, distributions of velocities along the depth.*

## Study on Cyclic Stress-Strain Relation Under Tension-Torsion Complex Loading

*Shang Deguang Yao Weixing*

*Wang Dejun*

(Department of Aircraft Engineering Nanjing University of Aeronautics and Astronautics 210016) (Shenyang Northeastern University 110006)

### Abstract

In this paper, the tension-torsion specimens were used as researching subjects. The cyclic stress-strain relation under multiaxial proportional and nonproportional loading was studied according to the characteristic of the stress and strain on the multiaxial critical plane and the researching results of multiaxial critical plane principle. A multiaxial cyclic constitutive relation model under proportional loading was first derived based on the uniaxial cyclic stress-strain relation, and then a multiaxial cyclic constitutive relation under nonproportional loading was obtained by the varying behaviour of the normal strain and the maximum shear strain on the critical plane. The experiments of tension-torsion proportional and nonproportional cyclic loading were conducted to verify the model. The prediction of the model agrees with the experimental results reasonably well.

Keywords: *proportional cyclic loading, nonproportional cyclic loading, multiaxial fatigue, cyclic stress-strain relation.*

## A New 3-D Numerical Semi-analytical Algorithm for Multiply Composite Structures with Varied Thickness

*Sun Qin*

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. C.)

### Abstract

Based on stratified theoretical methodology of composite laminates, a new 3D numerical semi-analytical algorithm for multiply composite structures has been established, which constructs its displacement functions through the combination of spline function, functional series and numerical interpolation. This present algorithm overcomes dependence on the selection of analytical functions for different loading conditions in normal semi-analytical methods, and no special assumptions are needed for varied-thickness structural region of composites.